Ромуальдас Кашуба

КАК РЕШАТЬ, КОГДА НЕ ЗНАЕШЬ КАК?

От редакции. Книга с таким названием (Romualdas Kašuba. Kaip spręsti, kai nežinai kaip) недавно вышла в Литве (на литовском языке). Нам показалось важным познакомить читателей нашего журнала с некоторыми ее главами («проблесками», как образно называет их автор) по следующим причинам. Быстро развивающиеся средства компьютерной поддержки преподавания математики невольно вывели на первый план внешние атрибуты преподавания математики: создатели и заказчики электронных курсов оперируют понятиями «учебник», «задачник», «тест», «глоссарий», «иллюстрация» и пр., подчас забывая о том, какой эффект производят эти материалы на развитие интеллектуальных орудий обучаемого. По нашему мнению, главное в компьютерной поддержке курсов – поддержка исследовательской, созидательной (продуктивной) деятельности учеников. Поэтому нам кажется, что книга Ромуальдаса Кашубы, основанная на тонком психологическом анализе работы с математической задачей, будет очень полезна создателям компьютерной поддержки обучения математики, экспертам, оценивающим качество учебных программных продуктов. Перевод авторский.

ПРОБЛЕСК I.
КРАТНОСТЬ СЕМИ
И ЕЕ СВЯЗЬ С СУММОЙ ЦИФР

Все решаемые нами задачи будут доступны всем, кто пожелает их решать.

Одни из них будут совершенно легкими, другие – похитрее или позаковырестей, но, для решения этих задач никакие специальные знания не требуются, вполне достаточно того, что изучается в школе.

И хотя они действительно доступны каждому желающему их решать (это главное условие!), некоторые из них предлагались и решались на международных конкурсах и первенствах.

Говорят, что от великого до смешного – один шаг. Вот и расстояние от простой до сложной задачи иногда весьма незначительное. Поэтому пусть возможные трудности не смущают читателя – человеку часто доступно гораздо больше, чем он себе представляет. Различие между профессионалом и любителем заключается лишь в том, что профессионал владеет каким-то знанием, до которого любитель всего-навсего лишь не успел докопаться.

... профессионал владеет каким-то знанием, до которого любитель всего-навсего лишь не успел докопаться.

Займемся нашей задачей, сформулированной в заголовке, только разобьем решение на конкретные шаги так, чтобы можно было понять естественный ход рассуждений и начать шаг за шагом решать задачу.

Такой подход можно назвать структурированием задачи.

Рассмотрим число, делящееся на 7, и сосчитаем сумму его цифр. Например, для числа 147 мы получим сумму цифр $1 + 4 + 7 = 12$.

Для обозначения суммы цифр числа N введем специальное обозначение $S(N)$.

Вот первые (простейшие) вопросы, относящиеся к числам, кратным 7.

1. Может ли сумма цифр числа, кратного 7, быть равной 10?

2. Может ли эта сумма быть равной 100?

Следующие два вопроса чуть сложнее.

3. Может ли сумма цифр числа, кратного 7, равняться 2007? А 2008? Может ли получиться 2009?

4. Какова наименьшая сумма цифр числа, кратного 7?

Наконец, некий обобщающий вопрос с легкой философской окраской:

5. Какие числа являются суммами цифр чисел, кратных 7, и какие не могут ими являться?

В этой задаче мы сталкиваемся с некоторыми психологическими особенностями подхода к решению математических задач, ибо не существует ни одной мало-мальски интересной задачи, при решении которой не возникало бы трудностей любого и прежде всего психологического характера: поиск решения может сопровождаться удачами и поражениями, поэтому процесс решения всегда поучителен и очень занятен – особенно если в конце концов удается преодолеть трудности и довести задачу до конца, то есть установить истину и достичь той цели, которая изначально ставилась перед нами.

...не существует ни одной мало-мальски интересной задачи, при решении которой не возникало бы трудностей...

Итак, с какими психологическими особенностями мы сталкиваемся в данном конкретном случае?

Сразу видно, что это многоступенчатая задача.

Сначала ставится крайне простой или почти тривиальный вопрос, ответ на который практически очевиден.

Почему это делается?

Да, наверно, потому, что нас хотят увлечь этой задачей, а очевидностью вопроса, возможно, надеются еще и задеть наше честолюбие и другие здравые чувства. Наше мышление и воображение, наши чувства и воля иногда переплетаются самым причудливым образом, приводя нас в трепетное творческое состояние души. Все эти составляющие нашей личности иногда комбинируются самым неожиданным образом, и это состояние души запоминается надолго, иногда на всю жизнь.

При этом авторы задач наверняка рассчитывают на то, что, начав решение, мы будем стараться довести его до конца, действуя пословице: «Взялся за гуж – не говори, что не дюж».

Так давайте приступим к делу – лиха беда начало!

Сначала постараемся ответить на первый вопрос: может ли число, кратное 7, иметь сумму цифр, равную 10?

Рассмотрим несколько первых чисел, кратных 7: 7, 14, 21, 28, 35, ..., видим, что четвертое число в нашем ряду, коим является число 28, заведомо нам подходит. Теперь мы понимаем, что раз существует одно такое число, то тогда таких чисел неограниченно много (почему?)

Теперь мы можем продолжить этот ряд: 42, 49, 56, 63, 70, 77, 84, 91, 98, ...

Мы видим, что суммы цифр, хоть непоследовательно и подпрыгивая, но все же возрастают.

Если мы будем продолжать в том же духе, рассматривая дальнейшие кратные, то сотню как сумму цифр мы наберем не скоро. Но надежду когда-нибудь получить в качестве суммы число 2007 мы не потеряли. Подумаем, как дальше все может развиваться. Вдруг повезет, и мы что-нибудь придумаем, что-нибудь да изобретем.

Хотелось бы как-то ускорить процесс – не продолжать же так последовательно продвигаться по кратным семерки. Может быть, применить так называемое «приращивание», когда одно число «пристегивают» или «приписывают» к другому числу или, на худой конец, даже к нему самому.

Например, если число прирастает собою, то, начав с числа 28, мы получим число 2828. Как вы думаете, «приращенное» число 2828 все еще делится на 7, как на 7 делилось исходное число 28?

Само собой разумеется, что деление на 7 не пропадает, так как $28 = 7 \times 4$, а $2828 = 7 \times 404$. Далее, после повторного «приращивания», получим $282828 = 7 \times 40404$, значит, и последующие числа такого вида заведомо делятся на 7. Сумма цифр числа 2828, по сравнению с суммой цифр исходного числа 28, возросла на 10, и так будет после каждого «приращивания». Так продолжим «приращивание» блока «28». Проделав это надлежащее число раз, получим довольно большое, но зато понятно как составленное» число: 28 282 828 282 828 282 828, сумма цифр которого уже 100 и которое очевиднейшим образом делится на 7, так как

$$28\,282\,828\,282\,828\,282\,828 =$$
$$= 7 \times 4\,040\,404\,040\,404\,040\,404.$$

Итак, мы успешно завершили решение второй части задачи, отдавая себе отчет в том, что всякое число, оканчивающееся на 0 или составленное из целого числа полных десяток, заведомо является суммой цифр некоторого числа, кратного 7.

Все это отлично, но ведь у числа 2007, равно как и у следующих за ним чисел 2008 и 2009, 0 не является последней цифрой. Как же быть в таком случае?

Давайте посмотрим еще раз на первые числа нашей последовательности: 7, 14, 21, 28, 35, 42, ... Мы видим, что если мы хотим, чтобы сумма цифр равнялась 2007, то нужно использовать само число 7. То есть мы начинаем опять с «приращивания» числа 28 сначала к самому себе, а потом уж к промежуточным числам вида 2828...28. «Склеив» таким образом 200 таких фрагментов, получим 400-значное число с суммой цифр равной 2000. Теперь достаточно дописать 7 или справа, или слева, или вписать строго между какими-нибудь двумя соседними фрагментами «28».

Если мы впишем 7 внутрь фрагмента «28», то делимость на 7 может быть потеряна: например 28 на 7 делится, а число 278, на 7 не делится. Таким образом, мы указали одно из 401-значных чисел 282828...287 или 7282828...28, 2872828...28, 2828728...28, ... Случай с суммой чисел 2008 разбирается с привлечением в завершающей стадии любого другого фрагмента с суммой цифр 8 – годится, например, фрагмент «35», и тогда получается 402-значное число 282828...2835, или 352828...2828, или 2835282828...28 и т. д. Ну, а для того чтобы «сконструировать» число, кратное 7, с суммой цифр, равной 2009, достаточно к уже неоднократно использованному нами 400-значному числу-трафарету вида 282828...28 с суммой цифр 2000 «присоединить» какой-нибудь делящийся на 7 фрагмент с суммой цифр 9. Это легко сделать, взглянув на продолжение ряда первых кратных 7 чисел: 49, 56, 63, 70, 77, 84, 91, 98, ... и выбрав, например, число 63. Мы можем получить, например, 402-значное число 632828...28.

Мы уже проделали большую часть работы и вплотную подошли к обсуждению основных вопросов: какими вообще могут быть суммы чисел, кратных 7 (и какими они быть не могут)?

Определенный опыт по «по приращиванию», приобретенный нами, подсказывает, что если бы нам удалось обнаружить число, кратное 7 с суммой цифр, равной 1, то тогда мы могли бы утверждать, что любое число является суммой цифр некоторого числа, кратного 7.

Увы, нас поджидает некое разочарование – никак не удается найти число, одновременно и делящееся на 7, и имеющее сумму цифр, равную 1. Что представляют собой числа с суммой цифр, равной 1? Это числа, которые начинаются с 1, а далее следуют нули, то есть это числа 1, 10, 100, 1 000, 10 000, 100 000, ..., но эти числа делятся лишь на двойки, на пятерки, на их степени и произведения этих степеней, поэтому сумма числа, кратного 7, не может равняться 1.

То же самое можно получить иначе, более «конструктивным» способом, рассматривая возможные остатки таких чисел при делении на 7.

Начнем с 1, но 1 сама уже и есть остаток. Далее, $10 = 1 \times 7 + 3$, то есть остаток при делении 10 на 7 равен 3, $100 = 14 \times 7 + 2$, остаток при делении 100 на 7 равен 2. Мы получили три разных остатка при делении единицы с нулями на 7, а именно 1, 3 и 2. Если последующие три числа такого вида 1 000, 10 000 и 100 000 дадут другие остатки и не будут делиться на 7, то и остаток 0 никогда не появится, так как последующие остатки начнут повторяться. Действительно, так и происходит: $1000 = 142 \times 7 + 6$, следовательно, в наборе остатков появился новый остаток 6, $10\,000 = 1428 \times 7 + 4$ – новый остаток 4, наконец, $100\,000 = 14285 \times 7 + 5$ – появился последний не встречавшийся ранее остаток 5, и теперь после очередного деления окончательно выяснится, пойдет ли все по кругу, как это нам представляется.

Так как $1000\,000 = 142857 \times 7 + 1$, то так все и произошло, мы «зациклились», так как получили новый «старый» остаток 1, и дальше все пойдет по уже известному нам пути.

Следовательно, мы и другим способом убедились, что никакого числа, кратного 7 с суммой цифр, равной 1, не существует. Теперь нам придется надеяться найти число, кратное 7 с суммой цифр, равной 2.

Каков может быть вид у чисел с суммой цифр, равной 2? Это либо 2 с нулями, либо число, начинающееся с 1 и кончающееся тоже 1 с несколькими нулями между этими единицами. Рассчитывать на то, что двойка с нулями будет делиться на 7, не приходится, так как такое число является произведением двоек и пятерок, как и единица с нулями. Остаются надежда на две единицы с нулями между ними, то есть на числа вида 11, 101, 1 001, 10 001, 100 001, ...

Замечание. Мы специально не упомянули про такие числа, где после второй ненулевой цифры следуют нули, так как и приписывание и отбрасывание нулей, как мы уже убедились, никак не влияют на делимость чисел на 7.

Будем просто делить столбиком единицу с нулями и следить за получающимися промежуточными остатками. 1, 3, 2, ... Нужно лишь уловить момент, когда, приписав к очередному остатку 1, мы получим число, делящееся на 7. Именно тогда и поставим вторую единицу после нулей. В нашем случае это происходит уже на втором шаге, так как, $1 = 0 \times 7 + 1$, число 11 на 7 не делится, далее, $10 = 1 \times 7 + 3$, число 31 также на 7 не делится, $100 = 14 \times 7 + 2$ – число 21 делится на 7. Таким образом, мы получили число 1001, которое делится на 7, и сумма цифр числа которого равна 2.

Мы установили ранее, что сумма цифр числа, кратного 7, не может быть равной 1, поэтому теперь мы получаем, что наименьшая сумма цифр у числа, кратного 7, равна 2.

Остается окончательно понять, какими эти суммы цифр могут быть и какими они быть никак не могут.

«Пристегивая» последовательно «фрагмент 1001» сначала к самому этому числу, а далее последовательно к получаемым числам, имеем ряд чисел: 10011001, 10011001, 100110011001, ... с суммами цифр, равными 4, 6, 8, ..., соответственно.

Другими словами, обнаружив, что 1001 делится на 7, с помощью вышеупомянутого «приращивания» заключаем, что любое четное число является суммой цифр некоторого, правда, по нашей конструкции, весьма большого числа, кратного 7.

Ну, а как быть с нечетными суммами цифр чисел, кратных 7? Во-первых, мы уже убедились, что первое из положительных целых нечетных чисел, гордая единица, суммой цифр такого числа не является. Следующее нечетное число 3. Является ли оно суммой цифр такого числа? Да, является, причем, по счастливому стечению обстоятельств, это число долго искать не приходится. Достаточно, например, заметить, что если число, кратное 7, с суммой цифр 3 существует, то тогда такое число делится на 3. Но тогда оно должно делиться и на $3 \times 7 = 21$. Остается заметить, что само «напросившееся нам» число 21 уже является примером разыскиваемого числа, так как имеет сумму цифр, равную 3, и делится на 7.

Теперь можно «прирастить» к числу 21 «фрагмент 1001» и получить новый ряд чисел, кратных 7: 211001, 210011001, 21100110011001, 211001100110011001, ..., имеющих сумму цифр, равную соответственно 5, 7, 9, 11, ... Таким образом, мы получили, что любое нечетное число, за исключением 1, тоже является суммой цифр некоторого числа, кратного 7.

В результате получаем «глобальный» ответ на интересующий нас вопрос: каждое целое число, кроме 1, является суммой цифр некоторого числа, кратного 7.

Приведем теперь некоторые соображения с «философской окраской».

Не без некоторой гордости заметим, что при решении поставленной задачи мы вели себя в точности так же, как и при любом другом научном исследовании: сначала подмечали и устанавливали некоторые факты и изучали их, затем, опираясь на полученные результаты и используя определенные соображения (в нашем случае мы использовали «приращивание» и изучали остатки от деления на 7), делали выводы (установили, что всякое число, кроме 1, является суммой цифр некоторого числа, кратного 7). При этом мы повсеместно пользовались тем фактом, что если число $ABC...Z$ делится на целое число m, то и числа $ABC...ZABC...Z$, $ABC...Z...ABC...Z$ также делятся на m. Еще мы подметили, что деление «столбиком» поставляет нам дополнительную информацию и в этом плане гораздо предпочтительней калькулятора.

А дальше что? Дальше, как и в любом научном исследовании, появляются новые вопросы, причем практически их всегда больше, чем это можно было представить до того, как начали решать задачу.

Неужели наша скромная задача тоже в состоянии «поставлять» новые вопросы и задачи?

Ответ: да, еще как в состоянии! Например, естественно возникают такие вопросы:

1. Можно ли заменить число 7 другим числом и получить тот же результат?

2. Какие множества целых положительных чисел могут быть множеством сумм цифр всех чисел, делящихся на некоторое целое положительное число m?

Таких и похожих вопросов тьма тьмущая – только успевай на них отвечать!

Предлагаем читателю решить похожую задачу, один из вариантов которой предлагался на II Литовской Олимпиаде для учеников младших классов в 2000 году:

Какими могут быть суммы цифр чисел, делящихся на 23?

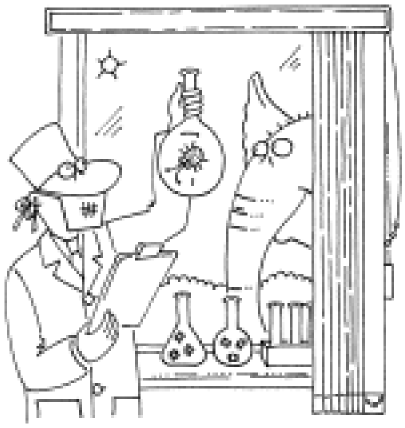
А какими свойствами обладали бы суммы цифр чисел, делящихся на 99? 5? 101?

ПРОБЛЕСК II.
ЕЛЕ ЗАМЕТНЫЕ ДЕЙСТВИЯ, ИЛИ МИКРОДВИЖЕНИЯ

Есть множество вещей, к которым мы относимся как к мелочам и часто не желаем вообще их обсуждать, потому что в глубине души считаем их незначительными.

Здесь, однако, мы могли бы вспомнить о том, что при восхождении альпиниста на вершину какой-нибудь еле заметный выступ, за который можно зацепиться, может оказаться решающим – не окажись

...заметим, что при решении поставленной задачи мы вели себя ... как и при любом другом научном исследовании...



Есть множество вещей,
к которым мы относимся как к мелочам
и часто не желаем вообще их обсуждать...

его, и восхождение наше могло бы быть прервано, и весь поход мог бы оказаться неуспешным.

Остановимся на задаче, которая была предложена семиклассникам на Минском городском первенстве 2004 года. Вот ее формулировка:

Даны 5 натуральных чисел. Про эти числа известно, что если бы мы сложили их всевозможным образом по 3 числа, то получили бы 7 различных сумм, а если бы мы сложили их всевозможным образом по 4 числа, то получили бы 5 различных сумм. Надо доказать, что сумма всех 5 натуральных чисел делится на 5.

Для начала дадим этим числа имена a, b, c, d и e. Тогда все возможные их суммы по 4 числа можно представить как $a + b + c + d$, $a + b + c + e$, $a + b + d + e$, $a + c + d + e$, $b + c + d + e$, причем по условию все эти суммы различны. Первый вывод, который сразу можно сделать: так как эти 5 сумм по 4 слагаемых различные, то и все 5 данных чисел тоже различные, иначе какие-нибудь две суммы совпали бы, а это не так. Так как числа разные, то, не теряя общности, можем считать, что они возрастают в той очередности, как были названы: $a < b < c < d < e$.

Второй существенный вывод заключается в том, что если при сложении их всевозможным образом по три числа, мы получили 7 различных сумм, то и при сложении этих чисел всевозможным образом по два числа, мы тоже получим 7 различных сумм. Но если мы будем складывать пары чисел всевозможным образом, то получим 10 таких сумм: $a + b$, $a + c$, $a + d$, $a + e$, $b + c$, $b + d$, $b + e$, $c + d$, $c + e$, $d + e$.

По условию, среди них только 7 различных, следовательно, некоторые из суммы должны совпасть.

Попробуем установить, какие из них *заведомо различны.*

Ясно, что $a + b < a + c < a + d < a + e < b + e < c + e < d + e$ (сначала увеличение идет по первому, а потом – по второму слагаемому). Следовательно, в случае 5 различных исходных чисел всегда имеются 7 сумм по два числа, которые *заведомо различны.* Значит, остальные не названные нами суммы должны обязательно совпасть с некоторыми из уже упомянутых сумм.

Такими суммами являются в точности те суммы, в которых не участвуют ни a, ни e – *значит, это суммы* $b + c < b + d < b + e$.

С которой из этих 7 различных сумм может или должна совпасть, например, сумма $b + c$? Эта сумма явно превосходит сумму $a + c$ и в то же время она меньше суммы $b + e$, *следовательно, она совпадает с суммой* $a + d$ *или* $a + e$. Далее, сумма $c + d$ меньше суммы $c + e$, но больше суммы $a + d$, значит, она совпадает с суммой $a + e$ или с суммой $b + e$.

В свою очередь, сумма $b + d$ *заведомо* больше суммы $a + d$, но меньше суммы $b + e$, следовательно, она совпадает с суммой $a + e$.

Итак, мы получили: $b + c = a + d$, $b + d = a + e$ и $c + d = b + e$.

Переписав их как разность: $b - a = d - c$, $b - a = e - d$, $e - d = c - b$, видим, что $b - a = c - b = d - c = e - d$.

Эти равенства свидетельствуют, что разности каждых двух соседних чисел равны между собой, что, в свою очередь, равносильно тому, что эти числа образуют арифметическую прогрессию.

Отметим, что этим, вообще говоря, можно обойтись. А именно, из равенства $d - c = c - b$ следует, что $b + d = 2c$, а из $b - a = e - d$ вытекает, что $a + e = b + d = 2c$.

Или $a + b + c + d + e = (a + e) + (b + d) + c = 5c$, и, следовательно, сумма всех пяти исходных чисел действительно кратна 5.

ПРОБЛЕСК III. НЕЗНАЙКА И ЕГО АЛЬБОМЫ С ПОЧТОВЫМИ МАРКАМИ

Чего тут утаивать – и так известно, что Незнайка был до такой степени увлечен скандинавскими странами – почти в одинаковой мере Данией, Швецией, Норвегией, Финляндией и Исландией, что с неделю назад он стал собирать почтовые марки этих полюбившихся ему стран. Так как неделя – срок небольшой, то их у него пока совсем немного, и он каждый вечер их скрупулезно пересчитывает. Чтобы хоть как-то сделать так, чтобы их казалось больше, он только что пересчитал их всевозможными парами любых двух стран. Пересчитав их всевозможными парами он с некоторым удивлением обнаружил, что получились всего лишь 3 *различные суммы, как их парами ни считай, и эти суммы всегда либо* 77, *либо* 88, *либо* 99, *и никаких больше сумм у него не получилось, хотя всего возможных пар этих* 5 *стран было, как он прекрасно помнил и понимал, целых* 10, *значит, и разных их сумм по две тоже могло быть* 10. *Он еще раз пересчитал их с повышенным интересом – ничего нового – все те же* 77, 88 *и* 99 *и никаких других.*

С этим ошеломившим его известием он стремглав помчался к своему закадычному другу Знайке и с порога спросил, может ли такое быть?

– А может, ты мне еще сможешь сказать, сколько у меня может быть почтовых марок в каждом отдельно взятом альбоме? – спросил он у своего друга.

Что и говорить, задача и проста, и интересна, и даже есть о чем поразмышлять, а с другой стороны, неловко даже и заикнуться о том, что тут что-то слишком сложно или может не получиться. Действительно, тут и чисел не так уж много, и числа небольшие, все их суммы не превышают 100.

Давайте попробуем вместе со Знайкой и Незнайкой окончательно во всем разобраться.

Заметим, что, отбрасывая определенную словесную оболочку, мы по существу имеем дело с задачей, под номером 259, приведенной в очередном прекрасном сборнике белорусских олимпиад [2].

В первую очередь, Знайка, конечно, сразу понял, что числа марок отдельных стран не могут быть различными. Это действительно так, потому что, будь все эти числа различными, тогда мы бы имели, как и в предыдущей главе, целых 7 различных сумм, вместо теперешних 3. Далее, Знайка ясно понял, что не только пяти альбомов с разным числом марок у него нет, но нет и четырех альбомов с разным числом марок, потому что тогда было бы больше 3 различных сумм.

Действительно, если бы мы имели четыре альбома с разным количеством марок, то расположив их по возрастающей $a < b < c < d$, мы имели бы, по крайней мере, 4 заведомо различные суммы: $a + b < a + c < a + d < b + c < b + d < c + d$, а у нас их всего лишь 3. Это означает, что самое большое, что может быть, – это 3 альбома с разным числом марок.

Тогда возможны следующие случаи:

(А) есть три альбома с равным числом марок и два альбома – с разным числом марок, отличных также от числа марок в первых трех незнайкиных альбомах.

Незнайка был до такой степени увлечен скандинавскими странами ..., что с неделю назад он стал собирать почтовые марки этих полюбившихся ему стран.

(Б) есть одна пара альбомов с равным числом марок и другая пара альбомов – тоже с равным, но другим числом марок, и есть последний, пятый альбом, с числом марок, отличным от первых двух пар.

То есть в первом случае в незнайкиной коллекции будет либо 3 страны с одинаковым количеством марок П, П, П, четвертая страна с другим числом марок Д и пятая страна с еще другим числом марок Т, во втором случае имеются две скандинавских страны с равным числом марок П, другие две страны с равным числом марок В, отличным от числа П, и еще есть пятая страна со своим числом марок Т, отличным от П и от В.

Может ли такое случиться в нашей ситуации, когда все суммы исчерпаны суммами 77, 88 и 99?

Итак, какой набор мы имеем: (П, П, П, В, Т) или (П, П, В, В, Т)?

В первом случае число различных сумм не больше числа различных чисел в наборе

(2П, П + В, П + Т, В + Т), но тогда как объяснить, откуда могут взяться четыре разных числа в этом наборе при том, что нам известно, что имеются три различных суммы 77, 88 и 99?

В втором случае число различных сумм не больше числа различных чисел в наборе (2П + В, 2В, П + Т, В + Т) – в этом наборе имеется 5 различных чисел.

И тут нам на помощь приходит следующее случайное, но в данной ситуации крайне важное обстоятельство: набор (2П, П + В, 2В, П + Т, В + Т) никак не может совпасть с исходным набором Незнайки 77, 88 и 99, так в нем только одна четная сумма а в наборе (2П, П + В, 2В, П + Т, В + Т) их две: 2П и 2В, и они действительно различные, так как разными были числа П и Д. Следовательно, нужно рассматривать исключительно первый случай, только как тогда быть четырьмя разными суммами вместо трех наших?

Все эти сомнения развеются, если предположить, что некоторые из сумм в наборе (2П, П + В, П + Т, В + Т) могут совпасть. Но какие?

Заметим, что у нас еще числа не упорядочены: если бы мы их упорядочили, например, так: П < Д < Т, то тогда действительно в наборе (2П, П + В, П + Т, В + Т) все упомянутые 4 суммы различны.

Напомним, что мы имеем дело с набором (П, П, П, В, Т), где возможны только три случая расстановки упорядоченных чисел: первый (П, П, П, В, Т), который был уже рассмотрен и где получается 4 различные суммы, а значит, его мы должны исключить; второй случай (П, В, В, В, Т) и третий – (П, В, Т, Т, Т). Последний случай тоже нам не подходит, так как он порождает набор сумм (П + В, П + Т, В + Т, Т + Т), из которых никакие две не равны. Значит, нам может подойти только набор (П, В, В, В, Т), у которого должны быть три различных суммы (П + В, П + Т, 2В, В + Т), только нам надо найти ответ на вопрос, куда же деть четвертую сумму. Две суммы должны быть равны. Это может произойти только тогда, когда П + Т = В + В. Теперь все проблемы Незнайки завершаются в два счета. Как только набор чисел (П + В, П + Т, 2В, В + Т) окажется незнайкиным случаем (77; 88; 99), то тогда 2В = 88 и В = 44.

Теперь уже 3 страны в незнайкиной коллекции предоставлены наборами в 44 марки каждая, а тогда четвертая страна предоставлена 77 – 44 = 33 марками в незнайкиных альбомах, а последняя пятая, самая многочисленная предоставлена 99 – 44 = 55 марками.

Заметим, что действительно в наборе (33, 44, 44, 44, 55) сумма марок самой «марочно бедной» и самой «марочно богатой» страны равна 33 + 55 = 88, и это равняется удвоенному количеству марок всех трех «марочно середняковых» стран.

С удовлетворением отметим, что, даже работая с ограниченным материалом, Незнайка сумел проявить определенную арифметическую сноровку.

ПРОБЛЕСК IV. ГДЕ ПРЕДЕЛ МОИХ ВОЗМОЖНОСТЕЙ, УМЕНИЙ И СПОСОБНОСТЕЙ?

«Желаешь двигаться вперед, пожалуйста!»

Отбрасывая ребячью наивность типа «ой, да я тут все могу», плачевные восклицания «ой, до чего тут все сложно», а также равнодушное ворчание, сопровождаемое словами «а нам все равно», мы все равно чуть-чуть коснемся одного вопроса, крайне любопытного для всякого мало-мальски думающего человека.

Как узнать, каковы наши возможности? Насколько они велики? Где заключены их границы? Можно ли их раздвинуть? Что было бы полезно с этой целью предпринять? Как понять, что в данной ситуации осуществимо, а за что не стоит браться? И почему именно это не удается осуществить никоим образом? Как это обнаружить? А обнаружив, что это возможно, как в это окончательно поверить? Поверив и уже взявшись за дело, как довести это все до победного конца? Откуда взять идеи и слова для убедительного рассуждения, именуемого доказательством?

Эти вечные вопросы всегда интересовали человечество, действуя на людское воображение, способствуя новым поискам, дерзаниям и размышлениям. Нерешенные проблемы иногда заставляли буквально бросать все, а затем через какое-то время опять возвращаться к ним, часто опять с переменным успехом.

Математика сулит воистину неисчерпаемые возможности потренироваться в том, «что можно и что нельзя».

Начнем с простейшего упражнения, которое, по предложению литовской стороны, было включено в список задач, решаемых участниками Международного конкурса «Кенгуру» в 2003 году.

Так о чем же была эта задача?

Какое самое большое число последовательных натуральных чисел можно записать, у которых сумма цифр не делится на 5?

Первое, что сразу приходит в голову, это то, что из каждых 5 подряд идущих натуральных чисел в точности одно из них делится на 5. Однако в нашем случае мы имеем дело с делением на 5 не самих чисел, а суммы их цифр. Неужели от этого что-нибудь изменится?

Даже самый маленький численный эксперимент сразу обращает внимание на то, что длина таких последовательностей чисел отнюдь не одна и та же.

Например, серия чисел 24, 25, 26, 27, заключенных между числами 23 и 28, сумма цифр которых на 5 заведомо делится, состоит из 4 чисел. Может быть серия, состоящая из трех чисел, например 88, 89, 90. Действительно, сумма каждого числа этой серии на 5 не делится, а заключена она между числами 87 и 91, с суммой цифр, делящейся на 5.

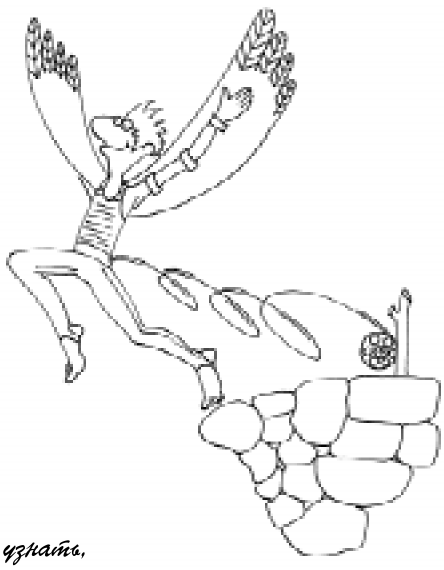
Какой еще может быть длина такой серии?

Следующий пример показывает, что длина может быть не только меньше, но и больше 4. Примером может служить еще одна последовательность, на этот раз уже из 7 чисел: 97, 98, 99, 100, 101, 102, 103, заключенной между числами 96 и 104, сумма цифр которых на 5 делится.

Так какова же максимальная длина может быть у такой последовательности?

Ответ на этот вопрос прост и нам его подсказывает следующее соображение: рассматривая 5 последовательных чисел из одной «десятки», например, 12, 13, 14, 15, 16, мы видим, что сумма цифр у них тоже последовательно «возрастет на единицу», и, следовательно, сумма цифр у одного единственного из них будет делиться на 5.

Отсюда следует заключение о том, что во всякой десятке может оказаться не бо-



Как узнать, каковы наши возможности?

лее четырех подряд идущих чисел с суммой цифр, не делящейся на 5.

Следовательно, можно рассчитывать, что самое большое число таких чисел может получиться на «стыковке» двух соседних десяток.

Осталось подыскать такой пример, и далеко ходить за ним не приходится, так как годятся 8 последовательных чисел: 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13.

Несколько вопросов к не утратившему интереса читателю:

1. Какова минимальная длина может быть у такой последовательности чисел? Пример последовательности из 3 чисел был указан. Может ли эта длина быть еще меньше, скажем, 2? Ну, а 1? А с длиной 0 как? Получается, что тогда ее вообще нет!

А если, вместо суммы цифр 5, рассматривать сумму цифр 6, то какими тогда будут длины таковых последовательностей?

2. А если брать не 5 и не 6, а другие суммы чисел, например, 11?

Интересно, что поменяв эти небольшие числа на гораздо более известное число 13, получим задачу, которая уже предлагалась на Международной командной олимпиаде по математике «Балтийский путь».

3. Сколько может быть последовательных натуральных чисел, у которых сумма цифр не делится на 13?

Задачи 2 и 3 уже немного сложнее, и здесь нам могут встретиться некоторые неожиданности. Все это будет связано с тем, что и 11, и 13 больше 10, и мы не сможем применить те же рассуждения, что и в задаче 1, где мы использовали прибавление единицы к каждой цифре при переходе к следующей последовательности чисел.

И вообще, пусть каждый дочитавший до этого места, спросит себя, либо своего товарища, что он стал бы делать в ситуации, если бы кто-нибудь предложил поменять числа на что-нибудь посложнее, например на 100, что было бы тогда с длинами таких последовательностей?

Читатель, все ли еще Тебе кажется, что и это Ты можешь, что и тут для Тебя все просто? Не зря говорится – долго ли умеючи?

И действительно, не зря говорится – *«познайте истину, и она сделает вас свободными»*. Но *легко сказка сказывается, да не легко дело делается.*

А то ведь не ахти как хочется всякий раз восходить на интеллектуальные Джомолунгмы или Эвересты. Высоковато ведь, с кислородом туговато, усталостью большой да истощением чревато. Но давайте вспомним:

«выше гор могут быть только горы»...

и давайте продолжать...

Ромульдас Кашуба,
доцент факультета математики и информатики Вильнюсского университета (Литва).